David Dockterman

Profesor en el área de Educación de la Universdad de Harvard, donde pretende convertir la investigación en una práctica efectiva e innovadora. Ha guiado el desarrollo de programas de software. Ha sido asesor clave para el desarrollo de MATH 180 y READ 180 Universal. Es miembro de la Junta Editorial de la revista "Science of Learning".

El entendimiento **matemático**

En materia de aprendizaje profundo de matemáticas (o de casi cualquier otro tema), la confusión puede ser útil. Yo sé que esta misma afirmación puede resultar confusa para algunas personas. Después de todo, *confusión* suena como lo opuesto de *claridad,* que es normalmente el objetivo de la educación. Los maestros buscan que los alumnos tengan habilidades y conocimientos perfectamente claros. Se les presenta un problema o una pregunta y ellos proveen respuestas correctas. Sin embargo, el viaje hacia la claridad se puede facilitar por medio de brotes productivos de confusión en el camino.

En este trabajo, presentaré un muy breve repaso de las definiciones del entendimiento matemático, principalmente en cuanto a sus diferencias de las competencias procedimentales o el aprendizaje mecánico. Luego, proporcionaré ejemplos de las dificultades que pueden surgir cuando los maestros o los materiales didácticos simplifican los conceptos matemáticos abstractos con el fin de hacerlos más accesibles y claros para los niños. Para finalizar, propondré algunas maneras de usar materiales manipulativos, la conversación y la confusión constructiva como mecanismos para fomentar un proceso de aprendizaje profundo en las clases de matemáticas.

¿Qué es el entendimiento?

Piense en esta ecuación: a + b = c. ¿Qué significado tiene para usted? ¿Qué podrían representar estos símbolos? Quizás *a* simboliza el número de videojuegos que yo tengo y *b* es el número de videojuegos que usted tiene. Entonces c sería el número de videojuegos que tenemos en total. O *a* podría ser el número de goles que anoté antes del partido de hoy y *b*, el número de goles que anoté hoy. Aquí, *c* sería el número de goles que he anotado hasta el momento. Pero tal vez *b* sea el número de goles que creo que anotaré en el partido de mañana. O *c* podría ser el número total de goles que quiero anotar esta temporada. En este caso, *b* sería el número total de goles que me hacen falta para llegar a mi meta. Me mareo de solo imaginar todas las posibilidades.

Incluso puede que *a*, *b* y *c* ni siquiera sean la misma cosa. Por ejemplo, *a* podría ser un número de

DISPONIBLE EN PDF

http://rutamaestra.santillana.com.co/edicion-26/el-entendimiento-matematico/

manzanas y *b*, un número de bananos. Entonces *c* es el número total de manzanas y bananos juntos que pueden agruparse como frutas. Siempre sumamos cosas distintas: paletas + chocolates = dulces; ovejas + vacas = ganado; gatos + perros = mascotas; hombres + mujeres = personas. Hay un sinfín de posibilidades.

Todo lo mencionado hasta ahora implica cantidades discretas, objetos individuales que se pueden contar. ¿Qué pasa con algo como el agua o el tiempo? El agua es una sustancia continua, como la arena, la leche o el chocolate derretido. Se pueden "contar" en gotas o granos, pero generalmente se miden en unidades arbitrarias. Podrían ser cubetas de agua o kilos de arena. Y el tiempo ni siquiera es un objeto físico. ¿Qué sentido tendría sumar cubetas de chocolate líquido y minutos? a + b = c podría ser cualquier cosa, pero esto no significa que todas las opciones sean lógicas.

Si remplazamos las letras con números, como 8 + 3 = 11, la situación difícilmente se vuelve más concreta. ¿8 qué? Aunque sea cierto que 8 de algo más 3 de algo es igual a 11 de algo, ¿quién combinaría 8 motos y 3 planetas? ¿Y 8 minutos más 3 segundos? 8 + 3 es 11, pero 8 minutos + 3 segundos no suma 11 de nada.

Los símbolos en las matemáticas son sorprendentemente versátiles y abstractos. Y, sin embargo, de alguna manera esperamos que los estudiantes entiendan lo que significan y cómo funcionan. Comparemos el a, b, c de matemáticas con el a, b, c de la lectura. En la lectura, cada letra representa un sonido específico. En ciertas circunstancias, algunas letras pueden tener un sonido diferente, pero las opciones son muy limitadas. La letra t en el idioma español produce el mismo sonido al decir *tangente, triple y tierra*. No cambia. Esa misma letra *t* en matemáticas, por otro lado, es algo completamente distinto. Aunque muchas veces se utilice para representar tiempo, no sabemos cuánto tiempo ni en qué unidades. Podrían ser 3 segundos o 4 billones de años.

Las matemáticas están llenas de representaciones abstractas. Lograr que los estudiantes entiendan los símbolos y conceptos matemáticos siempre ha sido un reto (National Research Council, 2005)[1]. Incluso llegar a un acuerdo sobre la definición de *entendimiento* ha sido difícil (vea las quejas del matemático Kevin Devlin, por ejemplo, 2007) [2]. ¿El entendimiento se trata de explicar por qué un procedimiento funciona, saber cuándo y cómo aplicar un procedimiento, o tener la habilidad de comprender las operaciones matemáticas en contexto? Los Estándares Básicos Comunes de los Estados Unidos para Matemáticas sugieren lo siguiente:

Pero ¿qué es realmente el entendimiento matemático? Una característica distintiva es la habilidad de justificar, según la madurez matemática del estudiante, por qué una proposición es verdadera o de dónde viene una regla. Hay un mundo de diferencia entre un estudiante que puede usar una regla mnemotécnica para expandir, por ejemplo, (a + b)(x + y) y un estudiante que tiene la capacidad de explicar de dónde viene la mnemotécnica. El estudiante que puede explicar de dónde viene la regla entiende las matemáticas y puede tener mayor probabilidad de resolver exitosamente una tarea menos común, como expandir (a + b + c)(x + y). El entendimiento matemático y las habilidades procedimentales son igualmente importantes, y ambas pueden evaluarse a través de tareas matemáticas lo suficientemente robustas (Common Core State Standards Initiative for Mathematics, 2010, p. 4) [3].

Como suele ocurrir, la descripción del entendimiento recae en una yuxtaposición del conocimiento y las competencias procedimentales. Incluso si los maestros logran que los niños recuerden información y sigan reglas, el entendimiento requiere que los estudiantes comprendan lo que esa información significa y por qué esas reglas funcionan. El entendimiento también enriquece la transferencia, la habilidad del estudiante de discernir cuándo un procedimiento se puede aplicar a una tarea o situación novedosa.

Para el propósito de este trabajo, el entendimiento incluye todo lo anterior. Un estudiante que entien-

1 National Research Council. 2005. How Students Learn: Mathematics in the Classroom. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/11101.

2 Devlin, K. (2007). What is conceptual understanding? Publicación en línea en Devlin's Angle. https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_09_07.html.

3 National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). Common Core State Standards for mathematics: introduction. Recuperado de: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf

4 Maria Montessori, The Absorbent Mind, trans. Claude A. Claremont (New York: Dell Publishing, 1967.

5 Bruner JS. The course of cognitive growth. American Psychologist. 1964;19(1):1-15. doi:10.1037/h0044160.

6 Leong, Y. H., Ho, W. K. y Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. The Mathematics Educator, 16(1), 1-18. Recuperado de http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16_1/TME16_1.pdf

7 Fuson, K. C. (1988). Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer-Verlag.

8 Bender, Andrea y Beller, Sieghard. (2012). Nature and Culture of Finger Counting: Diversity and Representational Effects of an Embodied Cognitive Tool. Cognition,124(2), 156-182.

de a + b = c tiene una creciente biblioteca mental de ejemplos de lo que esa ecuación puede significar. Esa biblioteca puede iniciar con los ejemplos de números enteros positivos que mencioné antes e incorporar un poco de sensatez para cuestionar la suma de planetas con motos o rebatir que 11 sea la respuesta de la combinación de 8 minutos y 3 segundos. El entendimiento se profundiza y expande con fracciones y números negativos. Agregar pérdidas y ganancias quiere decir que a veces *c* puede ser menor que *a*. Entender las relaciones aditivas en a + b = c capacita a los estudiantes para aplicar la flexibilidad operacional a problemas de valor faltante y situaciones de sumas desconocidas. El aprendizaje profundo de matemáticas es rico. ¿Por qué parece ser tan difícil?

Dificultades para el entendimiento

En los años 60, la reformadora de la educación María Montessori y el psicólogo Jerome Bruner resaltaron la conexión entre la mente y el cuerpo. Para Montessori, observar a un niño hacía «obvio que el desarrollo de su mente se produce con sus movimientos». Para ella, «la mente y el movimiento van de la mano» (Montessori, 1967) [4], y sus escuelas incorporaron esta relación a sus métodos de enseñanza. Bruner, desde su posición académica, propuso que el entendimiento conceptual de los niños progresaba de una representación «enactiva» a «icónica» a «simbólica» (Bruner, 1964) [5]. Para explicar, usaba el ejemplo de un bebé que mueve un sonajero. La acción de mover el juguete crea un sonido que es asociado estrechamente con el sonajero. Cuando al bebé se le cae el juguete de la cuna, él mueve y abre su mano para saber si el sonido sigue ahí. Eventualmente, la imagen del juguete se vuelve suficiente para representar la acción de mover y crear sonido. Más adelante, la palabra *sonajero* se vuelve una representación simbólica de cualquier juguete que hace ruido cuando lo mueven.

Montessori y Bruner especularon que, para un niño, el entendimiento del mundo proviene de su interacción con este. Bruner trazó una progresión que transforma esas experiencias enactivas iniciales a entendimiento conceptual. El desarrollo del entendimiento de los números en niños es uno de los ejemplos más comunes de la aplicación teórica de la progresión enactiva-icónica-simbólica de Bruner, renombrada metodología concreta-pictórica-simbólica por educadores de matemáticas (Leong, Ho y Cheng, 2015) [6]. Los niños empiezan por contar objetos reales, moviéndolos con sus manos mientras los cuentan en voz alta. El proceso se vuelve un poco más abstracto cuando los objetos reales son remplazados por materiales manipulativos pictóricos (o íconos, en el lenguaje original de Bruner). En lugar de manipular físicamente patitos de juguete, por ejemplo, el niño puede contar con sus dedos (Fuson, 1988) [7]. Un dedo representa 1 patito. Ese mismo dedo podría representar 1 uva o 1 segundo o 1 año. Cuando un niño levanta cuatro dedos para indicar que tiene 4 años, está demostrando la etapa de representación icónica de Bruner. La interacción con un objeto real es remplazada con un objeto icónico, ya sea un dedo, una ficha o una línea, que podría representar cualquier objeto, no solo el que se está contando. La representación se vuelve completamente abstracta cuando el símbolo 4 se reconoce como una representación de cuatro objetos. No hay una correspondencia uno a uno entre el número 4 y la cantidad cuatro, como sucede con 4 dedos o 4 líneas.

Esta progresión de lo concreto a lo abstracto, ya sea en cuestión de número o de otros conceptos matemáticos, no es automática. Por ejemplo, los investigadores han descubierto que la manera de contar con los dedos varía según la cultura (Bender & Beller, 2012) [8]. En algunas culturas, se empieza a contar con la mano izquierda, en otras, con la derecha. Con qué dedo se comience a contar (índice, meñique o pulgar, por ejemplo) también varía según la cultura. Entre niños ciegos, contar con los

dedos es menos definido (Crollen, et. ál., 2011) [9]. Estudios de neurociencias sugieren que la forma de contar con los dedos puede influir en la manera en que el cerebro procesa los números (Berteletti y Booth, 2016; Tschentscher, 2012) [10], y que este efecto perdura hasta la adultez (Hohol, et. ál., 2018) [11]. El uso de los dedos o cualquier otro ícono como medio para asistir en la transición de experiencias concretas a entendimiento conceptual tiene que ser meditado e intencional. Si no, el entendimiento matemático se puede descarrilar en el camino.

Deborah Ball, una educadora e investigadora de matemáticas, advirtió en 1992 acerca de la «ilusión mágica» de que con solo poner materiales manipulativos (como se conoce a las representaciones icónicas en la educación matemática) en las manos de los niños, esto automáticamente conduciría al entendimiento conceptual (Ball, 1992) [12]. A Ball le preocupaba que los objetos representativos se usaran en formas procedimentales que en realidad debilitaran el objetivo previsto del entendimiento conceptual y que los maestros, cuyo entendimiento conceptual también fuera deficiente, no supieran cómo aprovechar estos objetos plenamente. Es probable que Ball tuviera razón al preocuparse.

Piense en materiales manipulativos que se usan con frecuencia para el entendimiento de las fracciones. Un diagrama circular tiene por objeto representar una *pizza* o algún tipo de pastel con el que los niños hayan tenido experiencias concretas. No obstante, esas experiencias concretas, de la vida real, pocas veces son tan claras como el material manipulativo. Los diagramas circulares están pre-cortados en pedazos iguales. Los pasteles reales, al menos los que yo como, casi nunca lo están. «Cuando los niños utilizan materiales manipulativos moldeados anticipadamente para representar fracciones, puede que no se den cuenta de la relevancia de que los pedazos sean del mismo tamaño» (Empson, 1995) [13]. En este caso, el nivel pictórico no refleja la acción de cortar pedazos de tamaños iguales. Ese paso ya está hecho. Con esto, se elimina el puente a la abstracción de que un símbolo de fracción como 1/6 signifique 1 de 6 partes *iguales*.

El uso excesivo del diagrama circular también puede llevar a una abstracción que presenta dificultades para evolucionar con el sistema numérico. Por ejemplo, los estudiantes pueden llegar a "entender" que las fracciones siempre son menores que 1, un error común que impide el reconocimiento de las fracciones como números que pueden existir en cualquier parte de la recta numérica (Niemi, 1996) [14]. Una representación o modelo que vincule lo concreto con lo simbólico puede funcionar para un período de educación matemática (como para números enteros o fracciones simples), pero ser insuficiente para educación posterior que presente otras formas numéricas (como fracciones mixtas o números negativos).

El entendimiento evoluciona cuando los estudiantes van incorporando nuevos conocimientos a sus redes existentes de entendimiento (National Research Council, 2005) [15]. En ocasiones, cuando los maestros intentan facilitar el contenido que están enseñando a sus estudiantes por medio de modelos y reglas simplificadas, puede que en realidad los estén predisponiendo a tener mayores dificultades en el futuro con contenidos más avanzados. Es verdad, por ejemplo, que los números enteros avanzan hacia la derecha en la recta numérica conforme se hacen mayores, pero las fracciones unitarias se mueven en la dirección opuesta, acercándose al cero, conforme crece el denominador. También es verdad que multiplicar números enteros positivos siempre resulta en un producto mayor que cualquiera de los factores, pero la multiplicación de fracciones no siempre da un número mayor.

Las experiencias concretas tempranas de los niños, así como los modelos y el lenguaje que los maestros utilicen para ayudarlos a convertir esas exposiciones enactivas en entendimientos generalizables puede conducir a tergiversaciones matemáticas, o, mejor dicho, a entendimientos incompletos (ver Ashlock, 2009 para un resumen robusto de equivo-

[9] Crollen, Virginie, Mahe, Rachel, Collignon, Olivier y Seron, Xavier. (2011). The Role of Vision in the Development of Finger-Number Interactions: Finger-Counting and Finger-Montring in Blind Children. Journal of Experimental Child Psychology, 109(4), 525-539.

[10] Berteletti, Ilaria y Booth, James R. (2016). Chapter 5 - Finger Representation and Finger-Based Strategies in the Acquisition of Number Meaning and Arithmetic. In Development of Mathematical Cognition (pp. 109-139).

Tschentscher, Hauk, Fischer y Pulvermüller. (2012). You can count on the motor cortex: Finger counting habits modulate motor cortex activation evoked by numbers. NeuroImage, 59(4), 3139-3148.

[11] Mateusz Hohol, Kinga Wołoszyn, Hans-Christoph Nuerk y Krzysztof Cipora. (2018). A large-scale survey on finger counting routines, their temporal stability and flexibility in educated adults. PeerJ, 6, E5878.

[12] Ball, Deborah Loewenberg. (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers, 16(2), 14-18,46-47.

[13] Empson, S. (1995). Using Sharing Situations to Help Children Learn Fractions. Teaching Children Mathematics, 2(2), 110-114.

[14] Niemi, D. (1996). A Fraction Is Not a Piece of Pie: Assessing Exceptional Performance and Deep Understanding in Elementary School Mathematics. Gifted Child Quarterly, 40(2), 70-80.

[15] National Research Council. 2005. How Students Learn: Mathematics in the Classroom. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/11101.

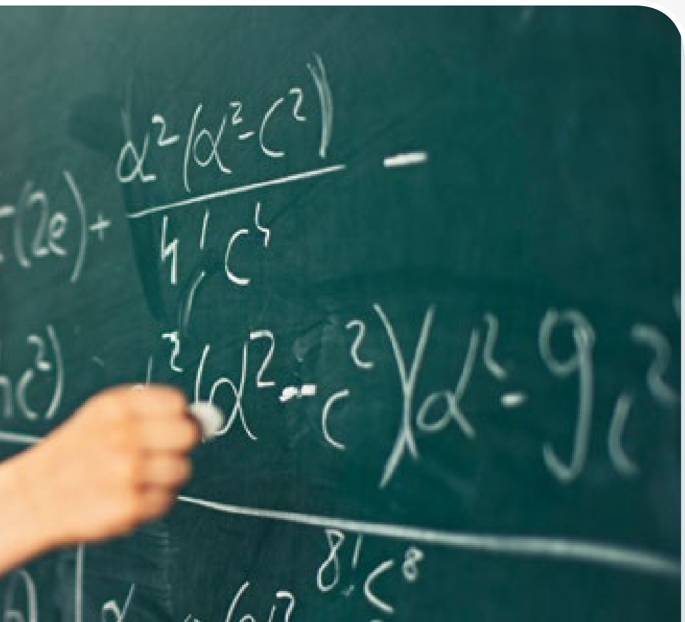
[16] Ashlock, R. (2009). Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Help Each Student Learn (10th Edition). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

caciones comunes que cometen los estudiantes en matemáticas) [16]. La evolución del entendimiento debe ser continua, revisada constantemente y realizada con el uso prudente de materiales extensibles que favorezcan al desarrollo a lo largo del tiempo. Ahora presentaré algunas directrices para este proceso educativo.

Infunda la perspectiva que las matemáticas deben tener sentido

A principios de 2018, la noticia sobre un problema de matemáticas desconcertante que fue presentado a niños de primaria en China dio vuelta al mundo (Rezaian, 2018; BBC, 2018; entre otros) [17]. El problema era: «Si en un barco hay 26 ovejas y 10 cabras, ¿qué edad tiene el capitán del barco?» Si usted contestó 36, no está solo. Si se sintió confundido y concluyó que la pregunta no se puede responder con la información dada, usted es parte de la minoría. Sumar ovejas y cabras para determinar la edad de alguien no tiene sentido, pero esto no detuvo a los estudiantes chinos, y a muchos otros, de hacer justamente eso.

De hecho, el problema de la Edad del Capitán tiene una larga historia. Se remonta a los años 70, cuando investigadores lo usaban para revelar la disposición de los estudiantes a abandonar la lógica en el ejercicio de procedimientos matemáticos aprendidos (ver Verschaffel, Greer y de Corte, 2000 para un repaso de esta investigación y otras relacionadas) [18]. El problema pone en evidencia que los estudiantes generalizan, a partir de sus experiencias en el salón de clases, que los problemas escritos se pueden resolver usando los números que se presentan en ellos. Los niños resuelven muchísimos problemas escritos calculando las cantidades disponibles. No piensan, solo hacen. En efecto, la escuela en China que presentó el problema a sus estudiantes pretendía fomentar el «pensamiento crítico». Las autoridades de la escuela querían que los estudiantes pensaran, en lugar de seguir ciegamente una serie de reglas procedimentales.



El tipo de entendimiento que detallé al inicio de este trabajo es todo lo opuesto a esta acción procedimental inconsciente. Los estudiantes que yo describí cuestionarían la idea misma de sumar ovejas y cabras para obtener un resultado en años. En animales, tal vez. Pero no la edad de una persona. Para que el aprendizaje profundo pueda crecer y prosperar, los estudiantes tienen que percibir que las matemáticas que están aprendiendo y haciendo tienen sentido con lo que ellos ya creen que saben y entienden.

Una de las características maravillosas de las matemáticas es su coherencia. Las reglas matemáticas no pueden ser reglas matemáticas a menos que tengan un sentido consistente. El lenguaje está lleno de reglas arbitrarias. ¿Por qué en español algunos sustantivos son femeninos y otros son masculinos? ¿Por qué hay tantos verbos irregulares? En inglés hay muchas más excepciones. En matemáticas, desde párvulos hasta bachillerato, no se encuentra ninguna. Una regla es una regla. Y aplica para números enteros, decimales, fracciones decimales, números negativos, y los símbolos abstractos que los representan.

Desafortunadamente, como revela el problema de la Edad del Capitán, muy a menudo los estudiantes se enfocan en lo que el educador de matemáticas Phil Daro llama «obtención de respuestas» (Daro, 2014) [19]. Si el patrón de comportamiento en clase se centra en hacer cálculos con los números dados, eso es lo que los estudiantes harán. Los maestros, y el material didáctico que usen, deberán encontrar un equilibrio entre la competencia procedimental (realizar cálculos y seguir pasos) y un buen entendimiento. Las reglas (como que la multiplicación siempre dará un número más grande como respuesta) que pueden ayudar al estudiante por un tiempo a obtener respuestas deben ser sustituidas por propiedades matemáticas que no expiran. a + b siempre será igual a b + a, incluso cuando a o b sean fracciones o números negativos. La explicación de por qué un procedimiento matemático fun-

[17] Rezaian, J. (2018). This Chinese math problem has no answer. Actually, it have a lot of them. The Washington Post, January 31, 2018, recuperado de https://www.washingtonpost.com/news/worldviews/wp/2018/01/31/this-chinese-math-problem-has-no-answer-actually-it-has-a-lot-of-them.

[18] Verschaffel, L., Greer, B. y de Corte, E. (2000). Making sense of word problems (Contexts of learning; 8). Exton, PA: Swets & Zeitlinger.

[19] Daro, P. (2014). Video recuperado de https://serpmedia.org/daro-talks/.

cionó o no funcionó debe acompañar a la obtención de resultados y, en ocasiones, tener prioridad sobre esta. A continuación presento tres métodos para favorecer ese cambio en la cultura y expectativas del salón de clases.

Utilice modelos extensibles con intencionalidad

El entendimiento simbólico se desarrolla a partir de representaciones enactivas e icónicas. Utilizaré la suma y resta como ejemplo. Las experiencias palpables de armar o desarmar objetos proporcionan una base para entender el significado de las sumas y las restas. Llevar zanahorias para el almuerzo, comerse algunas, y llevar las que sobraron de vuelta a casa para comer más tarde es una experiencia con un problema de cambio (o de agregar/quitar). Ver con envidia el número de calcomanías que tiene un amigo puede llevar a una representación enactiva de un problema de comparación. ¿Quién tiene más y cuántas más? Poner manzanas y bananos en una canasta de frutas ofrece una interacción concreta con un problema de combinación (o de armar/desarmar). Los problemas de cambio, comparación y combinación pueden ocurrir con cualquier tipo de números, en contextos físicos o no físicos. *Una persona ha trabajado parcialmente en un montón de proyectos. ¿Qué fracción o porcentaje de los proyectos está terminado?* Este es un problema de combinación que trata con fracciones de proyectos. ¿Los estudiantes ya desarrollaron modelos representativos de suma que puedan incluir partes de proyectos?

[20] American Institutes for Research. (2005). What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system (and what Singapore can learn from the United States): An exploratory study. Washington, DC: AIR.

Garelick, B. (2006). Miracle math: A successful program from Singapore tests the limits of school reform in the suburbs. Education next, 6(4), 38-46.

[21] Fuson, K. y Willis, G. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. Journal of Educational Psychology, 81, 514–520.

Jitendra, A. K. (2002). Teaching students math problem solving through graphic representations. Teaching Exceptional Children, 34(4), 34–38

Al principio, las fichas pueden tomar el lugar de las zanahorias, calcomanías o frutas. Pero los materiales manipulativos son engorrosos, y las fichas no representan muy bien los números no enteros. Las representaciones icónicas de estas experiencias concretas deben evolucionar y crecer conforme los estudiantes van aprendiendo el sistema numérico. También deben ser algo que eventualmente puedan visualizar. Le educación en matemáticas en Singapur se ha construido a partir de la progresión hacia entendimiento simbólico de Bruner. El sistema educativo busca usar modelos representativos cuidadosamente (Leong, Ho y Cheng, 2015) [6].

Algunas representaciones icónicas se usan temporalmente. Por ejemplo, mover dieciséis partes de 1/16 a una tira de fracción para formar un entero da una fuerte sensación táctil de la pequeñez de esas partes en comparación con mover cuatro partes más grandes de ¼ para formar ese mismo entero. La intención es desarrollar el entendimiento de las fracciones como partes iguales de un entero. A más partes iguales del entero, más pequeño será el tamaño de cada parte. Las fracciones, además, deben entenderse como parte del mismo sistema numérico que incluye los conocidos números enteros. El modelo de las fracciones como partes de un entero se debe integrar a una representación, como una recta numérica, que ayude a visualizar las fracciones como números y como parte de un sistema coherente que incluye números enteros, decimales y, eventualmente, números negativos.

Las reglas matemáticas aplican igual para todos los números. Los estudiantes deben ver esos números como parte del mismo sistema. Los modelos de sumas y restas, como la recta numérica, deberían estar diseñados para albergar el nuevo contenido matemático del plan curricular. Para desarrollar un aprendizaje profundo de matemáticas, es necesario poder desplazarse a lo largo de las representaciones icónicas con el cambio en los contextos y los contenidos.

Los modelos de barras o tiras, que se usan de apoyo para la educación en matemáticas en Singapur y otros lugares, proporcionan una extensibilidad casi ilimitada para la representación de las operaciones. La abstracción de los modelos de barras (ver figura 1), sin embargo, requiere un aprendizaje temprano. No es fácil aplicarlos en otros países o en otras culturas educativas (AIR, 2005; Garelick, 2006) [20]. Distintos modelos (ver figura 2) se han utilizado con éxito tanto entre estudiantes con necesidades especiales como entre estudiantes de educación normal en los Estados Unidos para lograr el entendimiento de situaciones de suma y resta (Fuson & Willis, 1989; Jitendra, 2002) 21.

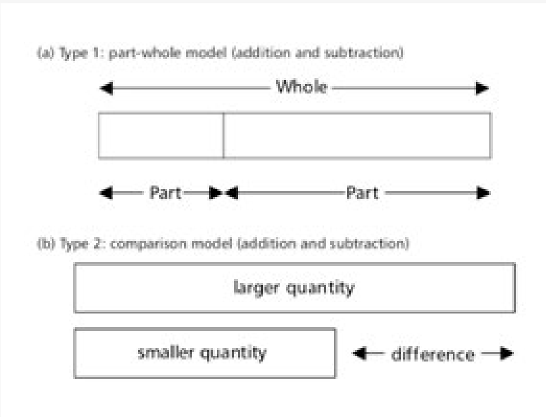


Figura 1 (Modelos de barras de Singapur, Englard, 2010)

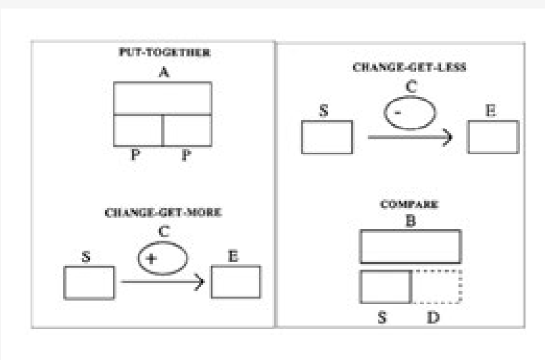


Figura 2 (bocetos matemáticos, Fuson & Willis, 1989)

Estos modelos muestran tipos de relaciones aditivas. El contexto y la forma de los números no tienen importancia. No estoy abogando por el uso de uno de los dos modelos. Estoy abogando por los modelos, físicos, visuales o virtuales (Pouw, et. ál., 2014; Tran, Smith y Buschkuehl, 2017) 23 que pueden crecer con el plan curricular. Las representaciones icónicas exitosas son aquellas que están integradas de manera sistemática e intencional en la educación y que fomentan el desarrollo de modelos *mentales* robustos a lo largo del tiempo. Los modelos importan, y cómo se usen también.

Promueva las conversaciones matemáticas

La advertencia de Deborah Ball en contra de la «ilusión mágica» del uso de los materiales manipulativos en matemáticas incluía un recordatorio de que «el entendimiento no viaja de las puntas de los dedos hacia arriba a través del brazo» (Ball, 1992) 24. Los modelos representativos son herramientas que favorecen el desarrollo del entendimiento. La evolución hacia lo abstracto tiene mayor respaldo cuando se expone el entendimiento naciente del estudiante, así como sus confusiones. Los estudiantes deben hablar y compartir.

Escuchar y ver respuestas a problemas matemáticos dice poco acerca de los procesos cognitivos (el pensamiento y el entendimiento) que llevaron a la elección de las estrategias y la aplicación de un procedimiento que produjo esa respuesta. Descubrir el posible pensamiento del estudiante para calcular 99 + 99 puede ilustrar lo que quiero decir. Tres estudiantes encuentran la respuesta correcta (198) y comparten cómo llegaron a ella. Un estudiante resolvió el problema alineando los números y usando un algoritmo (figura 3). El segundo estudiante visualizó el 99 como 1 unidad menos que 100 (figura 4). Este estudiante se dio cuenta de que sumar 100 a un número era un cálculo mental sencillo. Calculó 100 + 99 en su cabeza y obtuvo 199, y luego restó el 1 que había sumado antes y llegó a la respuesta de 198. El tercer estudiante también vio que 99 estaba cerca de 100 y eligió duplicar 100 y restar 2: $100 \cdot 2 = 200$; $200 - 2 = 198$

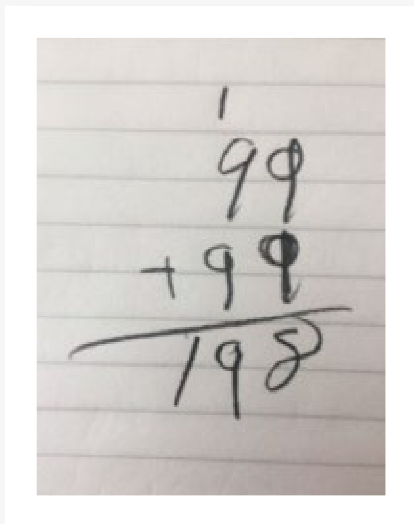


Figura 3

22 Pouw, Wim T. J. L., Van Gog, Tamara y Paas, Fred. (2014). An Embedded and Embodied Cognition Review of Instructional Manipulatives. Educational Psychology Review, 26(1), 51-72

Garelick, B. (2006). Miracle math: A successful program from Singapore tests the limits of school reform in the suburbs. Education next, 6(4), 38-46.

23 Tran, C., Smith, B. y Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. Cognitive Research: Principles and Implications, 2(1), 1-18

24 Ball, Deborah Loewenberg. (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers, 16(2), 14-18,46-47.

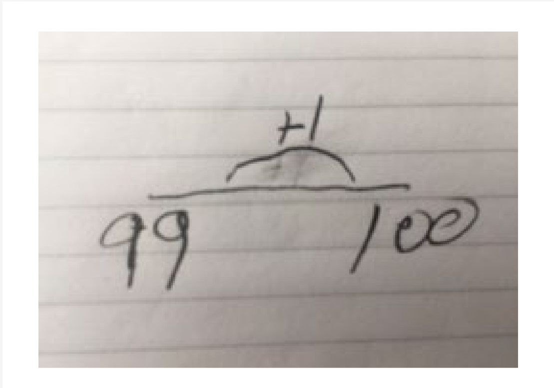


Figura 4

Un cuarto estudiante da la respuesta 188. ¿La respuesta incorrecta es producto de un error en el procedimiento, de olvidar “llevar” el 1 que se muestra en la Ffigura 3? Exponer el razonamiento de este estudiante revela algo más (Figura 5). Resulta que el cuarto estudiante descompuso el 99 en 90 + 9. 90 + 90 se puede calcular mentalmente con facilidad, como también 9 + 9. El error fue un descuido al combinar 180 y 18. Al momento de describir su proceso de pensamiento, el cuarto estudiante rápidamente identifica su error y cambia su respuesta a 198.

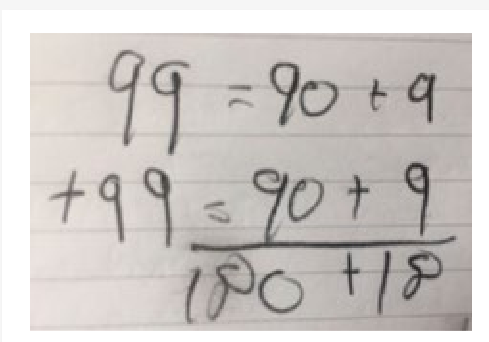


Figura 5

Todos estos, excepto el método procedimental, exponen el entendimiento subyacente general de los números que tienen los estudiantes. Los números se pueden componer y descomponer. 100 puede estar compuesto por 99 + 1. 99 se puede descomponer en 90 + 9. Las semillas de un entendimiento más simbólico también pueden estar echando raíces: 99 + 99 = (99 + 1) + (99 + 1) - 2. Siempre es verdadero que a + a = (a + b) + (a + b) - 2b. Los estudiantes que hacen esta simple aritmética están lejos aún del álgebra, pero los modelos que utilizan harán que la progresión hacia matemáticas más simbólicas sea más fluida.

No pretendo hacer de menos el método procedimental que usó el primer estudiante. Funciona, y conversar acerca de por qué funciona y cómo se relaciona con las otras estrategias puede hacer el entendimiento más profundo. Las investigaciones sobre este tipo de conversaciones matemáticas, o pláticas de números, en el salón de clases sugieren que sí mejoran el entendimiento (Berger, 2017; Kazemi, et. ál., 2017; Parrish, 2011) [25]. Los estudiantes no solo vuelven transparente su propio razonamiento, sino que pueden ver cómo piensan sus pares. La mezcla de estrategias permite que los estudiantes comparen sus modelos subyacentes con las acciones de sus compañeros. Esto promueve el razonamiento por encima de la obtención de respuestas.

Veamos también un ejemplo de solución de un problema que se basa en los modelos aditivos que describí antes. Piense en esta situación: *María tiene algunas calcomanías. Ella tiene más calcomanías que yo. ¿Cuántas calcomanías tengo yo?* ¿Cómo se podría resolver este problema? Imaginarse la relación (Figura 6) puede revelar las posibilidades. Se podría resolver el problema con una resta: las calcomanías de María menos la diferencia es igual a mis calcomanías. También se puede organizar la solución como un problema de valor faltante. Mis calcomanías más la diferencia es igual a las calcomanías de María.

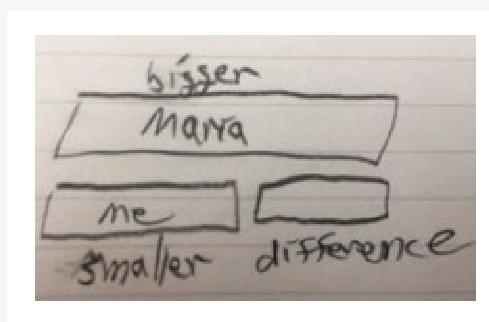


Figura 6

Veamos cómo incluir números puede influir sobre su pensamiento. *María tiene 30 calcomanías. Ella tiene 19 más que yo. ¿Cuántas calcomanías tengo yo?* 30 - 19 = ? o ? + 19 = 30.

Cualquiera de las dos estrategias, sumar o restar, nos da la respuesta. La suma y la resta están relacionadas: a + b = c y c - b = a.

[25] Berger, A. M. (2017). Using number talks to build procedural fluency through conceptual understanding. Ohio Journal of School Mathematics, 75, 751-757.

Parrish, S. (2011). Number talks build numerical reasoning. Teaching Children Mathematics, 18(3), 198-206.

[26] D'mello, Lehman, Pekrun y Graesser. (2014). Confusion can be beneficial for learning. Learning and Instruction, 29, 153-170.Jitendra, A. K. (2002).

Jason M. Lodge, Gregor Kennedy, Lori Lockyer, Amael Arguel y Mariya Pachman. (2018). Understanding Difficulties and Resulting Confusion in Learning: An Integrative Review. Frontiers in Education, 3, Frontiers in Education, 01 June 2018, Vol.3.

A pesar de que compartir el razonamiento de los estudiantes puede esclarecer su entendimiento subyacente y desarrollar su comprensión a través del análisis del pensamiento de los demás, lograr que hablen no es fácil. En un contexto dominado por la obtención de respuestas, muchos estudiantes carecen de experiencia para explicar. Además, si el contexto del salón de clases valora las respuestas correctas, compartir el pensamiento incorrecto significaría arriesgarse a sufrir la humillación de parecer tonto. ¿Cómo pueden crear los maestros un ambiente seguro para que los estudiantes hablen y posiblemente comentan errores?

Acepte la confusión constructiva

El aprendizaje ocurre en el límite de las competencias. Desarrollar el entendimiento es un proceso evolutivo. Las equivocaciones y las confusiones no solo son inevitables, son deseables. Algunos estudios incluso sugieren generar confusión a propósito, un proceso que a veces llaman inducción de confusión, para incrementar las oportunidades de aprendizaje de nuevos temas en general (D'Mello, et. ál., 2014; Jason, et. ál., 2018) [26] y de matemáticas en específico (Kapur, 2014) [27]. Cuando los alumnos se encuentran en un nivel de confusión adecuado, es más probable que presten atención al contenido, que trabajen en incorporar nueva información a su conocimiento existente. Las tareas comunes pueden llevar a la complacencia. El estudiante asume que ya sabe qué hacer. Cuando las tareas son demasiado desconocidas, el alumno se puede sentir abrumado y frustrado. La confusión debe encontrarse en lo que Vygotsky llamó la zona de desarrollo próximo del estudiante (Rogoff & Wertsch, 1984; Encyclopedia of Critical Psychology, 2014) [28]. La tarea se percibe como alcanzable, pero hay algo nuevo o desconocido. Llamémoslo la zona de confusión óptima (Graesser, 2011) [29].

Algunos ejemplos para aclarar cómo es este límite:

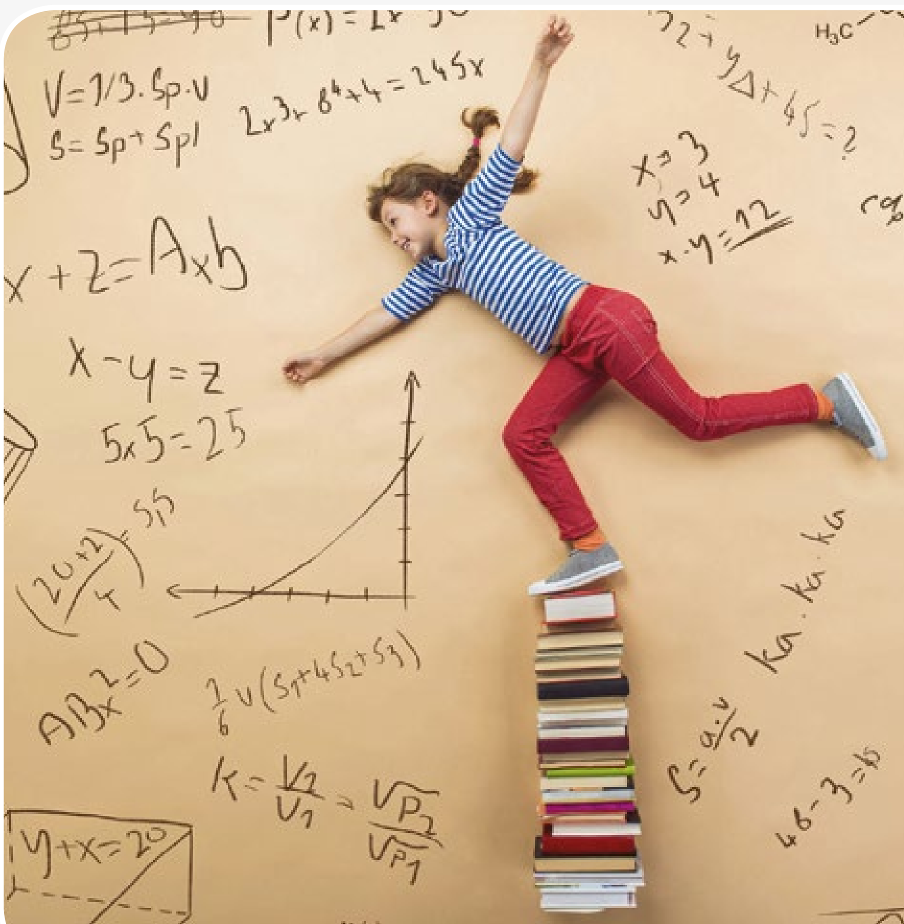
- Piense en el problema 24 · 4. Para los estudiantes que aprendieron el algoritmo estándar, la estrategia de solución de (25 · 4) - 4 puede resultar confusa. ¿Cómo funciona esa estrategia? ¿Alguien puede proponer otro ejemplo de esta estrategia? ¿Qué tal el problema 49 · 5? ¿Se obtendría la misma respuesta calculando (50 · 5) - 5?
- Para un niño que acaba de aprender las fracciones como partes iguales de un entero, la pregunta de si 5/5 es mayor a 4/4 puede ser el límite que lo hace dudar. 5 es mayor que 4, y 5/5 tiene 5 partes, mientras que 4/4 solo tiene 4. Tal vez 5/5 es mayor. Sin embargo, usar las tiras de fracciones demuestra que son iguales. Regresar al modelo representativo puede ayudar a aclarar el entendimiento naciente. Las partes de 1/5 son más pequeñas que las partes de ¼.
- Adelantemos un poco el tiempo de este estudiante de fracciones y presentemos una tarea que involucra compartir 3 bananos entre 2 personas. ¿3/2 puede ser una fracción? Si 3/2 es igual a 1½, tal vez el ½ sea la fracción, porque los enteros son enteros, no son fracciones. ¿O sí? ¿Qué fracción de los 3 bananos recibe cada persona? ¿La tira de fracciones será suficiente para visualizar fracciones mayores que 1?

Las confusiones intencionales, en el momento y en el nivel adecuados, pueden promover un aprendizaje y un entendimiento más profundos. En matemáticas, confundir a los estudiantes es fácil. Lograr la cantidad correcta de confusión para reforzar el aprendizaje requiere reflexión y planificación. También requiere un ambiente seguro para explorar esas confusiones...

[27] Kapur, Manu. (2014). Productive Failure in Learning Math. Cognitive Science, 38(5), 1008-1022.

[28] Rogoff, B. y Wertsch, J. (1984). Children's learning in the "zone of proximal development" (New directions for child development; n.o. 23). San Francisco: Jossey-Bass.

[29] Graesser, A. (2011). Learning, Thinking, and Emoting With Discourse Technologies. American Psychologist, 66(8), 746-757.



Nadie quiere parecer tonto. A todos nos importa cómo nos perciben los demás, y generalmente tomamos medidas para proteger nuestra posición social (Sapolsky, 2017) 30. Sucede lo mismo entre los estudiantes. Si compartir la confusión o una respuesta o explicación que probablemente sea incorrecta en clase pone en riesgo la posición social del niño, la acción más segura podría ser permanecer en silencio. El «ambiente de error» en el salón de clases de matemáticas es importante (Steuer y Dresel, 2015; Grassinger, et. ál, 2018) 31. Es necesario que los estudiantes se sientan seguros para cometer errores (para un resumen accesible de investigaciones acerca de la mentalidad con relación a la identidad académica y la pertenencia, ver Dweck, Walton, y Cohen, 2014) 32.

30 Sapolsky, R. (2017). Behave: The biology of humans at our best and worst. New York, New York: Penguin Press, an imprint of Penguin Random House LLC.

31 Steuer, G., y Dresel, M. (2015). A constructive error climate as an element of effective learning environments. Psychological Test and Assessment Modeling, 57(2), 262.

Grassinger, R., Scheunpflug, A., Zeinz, H. yDresel, M. (2018). Smart is who makes lots of errors? The relevance of adaptive reactions to errors and a positive error climate for academic achievement. High Ability Studies, 29(1), 37-49.

32 Dweck, Carol S., Walton, Gregory M. y Cohen, Geoffrey L. (2014). Bill & Melinda Gates Foundation, Bill & Melinda Gates Foundation, 2014.

Construir un ambiente propicio para confundirse y aprender de los errores implica establecer el esfuerzo constructivo como norma. Como mencioné al inicio de este trabajo, empiece por infundir la perspectiva de que las matemáticas deben tener sentido. Un ambiente de obtención de respuestas busca respuestas correctas. Una cultura de clase basada en el entendimiento, por otro lado, anticipa períodos de dificultad. Es normal esforzarse cuando se está aprendiendo algo nuevo, ya sea los números enteros, la multiplicación, la suma de fracciones con distinto denominador o la resolución de problemas algebraicos de varios pasos.

Refuerce el esfuerzo constructivo por medio de recompensas. Elogie a los estudiantes que expresen claramente una confusión o identifiquen un error en su pensamiento. Mantenga la retroalimentación positiva enfocada en las acciones productivas de los estudiantes, no en sus fracasos o renuncias.

En una fase temprana, utilice las conversaciones en parejas o grupos pequeños para reducir la exposición al público que tendría el estudiante frente al grupo completo. Las pláticas en grupos pequeños posibilitan mayor participación por parte de más estudiantes que las discusiones de la clase completa. Así, los estudiantes tienen la oportunidad de practicar hablar sobre matemáticas y generar confianza para compartir su razonamiento.

Resalte el crecimiento individual de los estudiantes en lugar de comparar el desarrollo. El aprendizaje no es una competencia para ver quién aprende más y más rápido. El objetivo es que todos logran un entendimiento profundo y competencias procedimentales. Haga que los estudiantes animen y apoyen el éxito de cada compañero. Toma tiempo establecer este tipo de ambiente en el salón de clases, pero esto hace que el esfuerzo de resolver las confusiones y equivocaciones inevitables del aprendizaje sea mucho más agradable y productivo.

Resumen

La búsqueda del entendimiento profundo en el aprendizaje de matemáticas le da sentido al contenido y favorece su aplicación en nuevos contextos. Construir ese conocimiento abstracto es un proceso continuo que involucra el uso de modelos representativos para conectar experiencias concretas con conceptos simbólicos generalizables. Desafortunadamente, el camino hacia el entendimiento puede estar socavado por un énfasis excesivo en la obtención de resultados y en atajos para realizar cálculos que rápidamente pierden su utilidad. La naturaleza de las matemáticas es coherente y consistente. Los modelos representativos deben ser elegidos cuidadosamente y usados como soporte para la coherencia y la lógica que son inherentes a esta disciplina. Un ambiente de error productivo puede facilitar la búsqueda continua de la claridad conceptual si se normaliza la confusión y el esfuerzo constructivo, que son partes inevitables del proceso de aprendizaje. **RM**

Ver referencias del artículo en la versión digital de la revista.