



## José Villella

Doctor en Didáctica de la Matemática, abogado al estudio de la enseñanza de la geometría. Investiga en el CEDE de la UNSAM y en la Fundación Cultural Glaux de Buenos Aires, Argentina.

# El devenir del punto

El título de este artículo quedaría más completo si se le agregaran dos puntos y una idea a continuación. Debería decir, *El devenir del punto: dilemas en la didáctica de la geometría*. De esa forma, tres son los conceptos que se relacionan y que vertebran las ideas a desarrollar. Nos referimos a: devenir, dilemas y didáctica de la geometría. Cada uno de ellos se complementa en su discursar en el texto que elegimos para expresar nuestras propuestas y todos se hilvanan a través del concepto de *punto*, una idea de la cual partimos para construir un entramado de otras ideas que conforman el apasionante mundo de la geometría escolar, que en este trabajo asociaremos al estudio del espacio como saber estratégico que permite planificar el movimiento, la acción.

Así, el *llegar a ser* del punto lo colocará en un estatus privilegiado para el análisis didáctico de las secuencias de clase que lo tienen como protagonista –aunque en algunas representaciones prefiera aparecer como necesario personaje secundario– y nos permitirá desarrollar tópicos referidos al rol profesional del docente que enseña geometría en la escuela.

## 1. El “llegar a ser” del punto

Diremos que, en tanto término de los llamados primitivos, el punto no admite definición y por ello será durante todo este trabajo considerado como una idea, una abstracción. Lo asociaremos a la mayor concisión y lo haremos encontrar en la escritu-



DISPONIBLE EN PDF

 <http://rutamaestra.santillana.com.co/edicion-26/el-devenir-del-punto/>



ra su forma material, perteneciendo así al lenguaje y queriendo significar silencio. En su aparición material remite a la no existencia, a la interrupción y al mismo tiempo se transforma en el puente entre una idea y otra. En tanto signo exterior al que referimos nuestra percepción desde pequeños, el punto se vuelve una costumbre y corre el riesgo de opacar la riqueza inaudible del símbolo. Artísticamente el punto se vuelve un ser viviente, enriquece el mundo de lo visual para el cual aparece como el choque de un instrumento con la superficie material. Así, la invisibilidad geométrica deviene material adquiriendo tamaño, recubriendo una impensada superficie, haciéndose poseedor de ciertos límites que lo aíslan de lo que lo rodea. Puede, al más típico estilo de Kandinsky, desarrollarse, volverse superficie y llegar a cubrir el plano. Pareciera que de esa forma el sonido interior cubre el espectro de lo audible; la forma se vuelve imprecisa; aparece una cierta ambivalencia en esa forma única, mínima, elemental. Comienza el entrecruzamiento entre saberes: geométricos, artísticos, filosóficos... tiene sentido estudiar para aprender geometría; tiene sentido reflexionar acerca de la enseñanza.

---

## 2. Dilemas en la enseñanza de la geometría

---

Enseñar geometría supone, para esta propuesta, adentrarse en el mundo de la construcción de los aprendizajes a partir del fomento de situaciones de enseñanza que coadyuven a la generación de nuevos conceptos.

Creemos que los docentes trabajan poco en la escuela con problemas en el espacio real, y, en los casos en los que dedican tiempo a la enseñanza de la geometría, lo hacen sobre el punto, el nombre de las figuras a las que él pertenece, el dibujo de polígonos con los que se generalizan las figuras, la memorización de fórmulas, el cálculo de áreas y de algunos volúmenes, las rectas... Esta descripción de la tarea docente caracteriza problemas profesionales basados en que muchos los docentes desconocen las aportaciones que la investigación en didáctica de la matemática ha realizado en este ámbito y en muchas ocasiones tienen escaso acceso a materiales y recursos adecuados para el desarrollo de dichos conocimientos en el aula. Por ello es necesario hacer una



diferenciación entre la enseñanza de conocimientos espaciales y la enseñanza de la geometría. El espacio sensible es aquel en donde están contenidos los objetos y es accesible por medio de los sentidos; el espacio geométrico es el resultado de un esfuerzo teórico llamado geometría que permite dar razón de lo sensible.

La geometría euclidiana que puebla nuestros diseños curriculares, está construida sobre un espacio puro y perfecto: no es el estudio del espacio y de nuestras relaciones con el espacio, sino el lugar donde se ejercita una racionalidad llevada a su excelencia máxima, donde el punto tiene existencia. Los conocimientos espaciales y conocimientos geométricos tienen, por lo tanto, características diferentes. Las niñas y los niños disponen de conocimientos espaciales mucho antes de aprender conocimientos de geometría. En esa génesis de los conocimientos, la geometría debe ser enseñada para que pueda existir. En el caso de los conocimientos espaciales podemos hablar de una génesis natural y, en el de los conocimientos geométricos, totalmente escolar. Aunque existe una gran cantidad de palabras comunes entre lo espacial y lo

geométrico, sin embargo, no tienen el mismo significado. En la vida corriente o profesional (fuera de la matemática) ninguna persona usa vocabulario geométrico para denotar como rectángulo a un objeto de forma cuadrada; en geometría, por el contrario, afirmar que todo cuadrado es un rombo, constituye la manifestación de un conocimiento particular, de una proposición geométrica que ha sido objeto de enseñanza.

En los programas escolares, la estructura de los conocimientos espaciales es menos conocida, aunque se utiliza con mayor asiduidad para resolver situaciones concretas en diferentes campos profesionales: carpintero, dibujante, electricista, topógrafo, plomero, albañil, ingeniero, etc. Esta organización conceptual de los contenidos algunas veces la aleja de los problemas reales a los cuales puede ayudar a resolver. En los problemas espaciales, mostramos la solución que hemos encontrado y validamos su idoneidad utilizando medios empíricos. En los problemas geométricos recurrimos a una solución matemáticamente probada.

La naturaleza de la validación de los saberes en geometría, nos lleva a desarrollar competencias para la demostración. Esta última afirmación genera preguntas profesionales: en la escuela, ¿se estudian los conocimientos que toda ciudadana o ciudadano necesita para desenvolverse en el espacio?; ¿se enseña geometría para contribuir al desarrollo y al dominio de las relaciones de los alumnos con el espacio sensible?; ¿se enseña geometría solo para desarrollar un aprendizaje de conocimientos que son objeto de un saber cultural totalmente formalizado?; ¿pasan los alumnos de forma natural de una relación práctica y espontánea con el espacio a una actividad de modelización geométrica?

Cuando hablamos de modelización, lo hacemos en dos sentidos: la modelización analógica y la geométrica. La modelización del espacio se denomina analógica porque los alumnos, en los procesos de resolución de las situaciones problemáticas propuestas en el espacio vivido, ponen en funcionamiento estrategias basadas en la construcción de esquemas, croquis, dibujos, grafos, mapas, planos. Esta modelización conserva propiedades de naturaleza topológica: proximidad, orden, convexidad, interior, exterior, frontera, continuidad, pero no conserva siempre relaciones geométricas tales como la proporcionalidad, el paralelismo, la perpendicularidad, etc.

La modelización del espacio se denomina geométrica porque los alumnos, construyen técnicas basadas en conocimientos de geometría: ángulos, rectas, polígonos, simetrías, giros, traslaciones, paralelismo, perpendicularidad, congruencia, semejanza... Se trata de una modelización que les permite establecer una relación con el espacio de tal manera que las nociones geométricas intervengan como medios de decisión, de acción, o de previsión razonada sobre un espacio sensible.

Así surge otra pregunta sobre la práctica de enseñanza de la geometría: ¿en qué beneficia al aprendizaje el proponer secuencias que permitan evolucionar de una modelización analógica a una modelización geométrica?

### 3. Las prácticas de enseñanza como objeto de estudio de la didáctica de la geometría

Diremos que las prácticas de enseñanza de la geometría de los docentes en el aula, pueden caracterizarse de acuerdo con el tipo de matemática que la sustenta, en función de la metodología empleada o del análisis didáctico que de ellas podamos realizar. Calificaremos a cada una de esas miradas con los adjetivos: epistemológica, metodológica y didáctica.

Bajo la mirada epistemológica, nos preguntamos: ¿qué matemática sustenta la práctica?: ¿Euclidianismo, cuasi-empirismo, constructivismo, estructuralismo...? ¿Se sustentan todas las prácticas sobre el mismo principio epistemológico? ¿Cómo se evalúa la coherencia de este sustrato epistemológico?

Bajo la mirada metodológica entendemos por gestión de la clase al proceso de diseño, ejecución, evaluación y generalización de las estrategias de enseñanza desplegadas por los docentes en el espacio de trabajo escolar, donde la intención es la enseñanza de los contenidos geométricos.

En este escenario es donde la circulación de los saberes geométricos puede asumir diversos modelos: los que se basan en la transmisión verbal de los contenidos organizados de manera acumulativa y según la lógica de la disciplina; los que pretenden racionalizar los procesos de enseñanza proponiendo como alternativa la descripción de los aprendizajes esperados en términos de conductas observables y programando exhaustivamente las actividades; los que se caracteri-

zan por respetar la autonomía y libertad de los alumnos durante su proceso de aprendizaje; los que toman en consideración que en la clase se produce una suerte de negociación entre los intereses de los alumnos (significatividad de los contenidos) y los de los docentes (coherencia epistemológica de los contenidos).

En esta negociación, los docentes son los mediadores naturales entre los contenidos y los estudiantes. Abonamos a la idea de que esta última, es la cualidad de la práctica que logra más y mejores aprendizajes y se resume en un proceso en que dialogan dos necesidades, dos lógicas diferentes. Mientras los docentes diseñan y formulan problemas geométricos, los alumnos desarrollan estrategias de solución que en su conjunto determinan un proyecto de actividad en el aula en el que los contenidos a estudiar alcanzan su mayor expresión.

La mirada didáctica nos da elementos para analizar las prácticas de enseñanza en el aula de geometría. Nos permite reflexionar si los problemas presentados por las y los docentes son significativos, tanto para el contenido como para los alumnos. Además, genera elementos para estudiar si los proyectos diseñados por los alumnos como solución a los problemas planteados resultan eficaces.

Con esta mirada, los docentes pueden reflexionar acerca de la generación o no, en sus clases, de actividades que aludan a la abstracción, invención, prueba y aplicación como parte ineludible de las competencias intelectuales que el estudio de la geometría en el aula debe dejar como resultado, cualquiera sea el nivel educativo en el que se desarrolle y siempre tomando como premisa, la adecuación de las propuestas y la validez de los resultados alcanzados al nivel evolutivo de los alumnos que conforman la comunidad de aprendizaje donde se desarrollan los proyectos. La explicitación de estas tres miradas como recursos profesionales docentes, ponen en evidencia las diferencias epistemológicas entre la naturaleza del conocimiento científico y el conocimiento práctico de los docentes.

Estas y estos profesionales, además de conocer los temas relacionados con su asignatura deben ser capaces de actuar frente a las situaciones de trabajo en el aula de forma rápida y eficaz, ofreciendo soluciones concretas a situaciones particulares, percibiendo la situación, interpretando la situación, reaccionando frente a la situación; poniendo en práctica una actitud docente reflexiva frente a su práctica.



---

## 4. La didáctica de la geometría como herramienta para la reflexión sobre las prácticas de enseñanza

---

De acuerdo con lo que desarrollamos, en el aula, la búsqueda mecánica de solución a los problemas puede sustituirse por la conjeturación, invención y resolución de problemas como situaciones abiertas, en donde no siempre toda la información está disponible –o hay más de la necesaria–, donde la solución no siempre existe o no es única y donde “el otro” aparece como una figura insoslayable para el aprendizaje, que sin dejar de ser un acto eminentemente individual, se transforma en una actividad social en la que prevalece la discusión y el compartir ideas, sugerencias y propuestas. Cuando los docentes asumen conscientemente este rol, gestionan sus clases con relación a un discurso que propone cuestiones y tareas provocadoras, que impliquen y estimulen el pensamiento de los alumnos haciendo que estos clarifiquen y justifiquen sus ideas verbalmente y por escrito; decidiendo qué ideas de las que surgen durante los debates se van a tratar en profundidad y en función de esta socialización de conocimientos, decidir cuándo y cómo introducir notación y lenguaje matemático en las ideas de los alumnos en orden a formalizarlas y luego generalizarlas; decidir cuándo proporcionar información, clarificar un tópico, modelizar, guiar o enfrentar a los estudiantes las dificultades surgidas. Asimismo, son estos docentes quienes guiarán la participación del alumnado en las discusiones y decidirán cuándo y cómo animar la participación de cada una de ellas y de ellos en el apasionante juego del aprendizaje escolar.

De esta manera podrá hacer que las alumnas y los alumnos atiendan, respondan y cuestionen lo que se exprese; usen una amplia gama de herramientas para razonar, establecer conexiones, resolver problemas y comunicarse; formulen conjeturas y presenten posibles soluciones a las mismas; exploren ejemplos y contraejemplos para investigar una conjetura; intenten convencerse a ellos mismos y al resto de compañeros de la validez de representaciones, soluciones, conjeturas y respuestas particulares; utilicen la evidencia y los argumentos matemáticos para determinar la validez de sus propios razonamientos y el de los demás. En síntesis, en la reflexión sobre la práctica habrán utilizado herramientas de la didáctica de la geometría que nosotros presentamos a partir del estudio del punto. **RM**



---

## Bibliografía

---

- BALL, Deborah y otros (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- FERRAGINA, Rosa (ed.) (2014). *GeoGebra entra al aula de matemática*. Buenos Aires. Miño y Dávila.
- FIORITI, Gema. (comp.). (2017). *Recursos tecnológicos para la enseñanza de matemática*. Buenos Aires. Miño y Dávila-UNSAM Edita. Buenos Aires.
- FOUREZ, Gerard (2008). *Cómo se elabora el conocimiento*. Madrid. Narcea.
- VILLELLA, J. (2006). *Ideas para enseñar a través de problemas*. Montevideo. Espartaco – EHU UNSAM.
- VILLELLA, J. y otros (2018). A Professional Development Experience in Geometry for High School Teachers: Introducing Teachers to Geometry Workspaces. En P. Herbst et al. (eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*, ICME-13 Monographs, disponible en [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_12)
- VILLELLA, J. y STEIMAN, J. (2019). *Patio, parque y pizarra. Estrategias para enseñar geometría a chicos de 9 a 14 años*. Montevideo. Ediciones Espartaco. Océano